TRANSACTIONS OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 293, Number 2, February 1986

CONDITIONS SUFFISANTES DE RÉSOLUBILITÉ LOCALE POUR DES OPÉRATEURS INVARIANTS À GAUCHE SUR DES GROUPES NILPOTENTS. II

BY
PIERRE LÉVY-BRUHL

ABSTRACT. On donne des conditions suffisantes de résolubilité locale pour des opérateurs différentiels invariants à gauche sur certains groupes de Lie nilpotents gradués. Ces conditions portent sur l'image de l'opérateur par certaines représentations unitaires irréductibles du groupe.

1. Introduction. L'étude de la résolubilité locale d'opérateurs invariants à gauche sur un groupe de Lie nilpotent gradué a fait l'objet d'un certain nombre de travaux récents. Dans le cas où le rang de nilpotence est deux, et où l'opérateur P est transversalement elliptique, on dispose de résultats assez complets, que l'opérateur P soit homogène [**CR**$_\mathbf{1}$, **RT**, **R**, **LB**$_\mathbf{1}$, **LB**$_\mathbf{2}$, **LB**$_\mathbf{3}$] ou inhomogène [**CR**$_\mathbf{2}$]. Dans ce dernier article, on obtient des conditions nécessaires et suffisantes pour les groupes dits de "type H", généralisation du groupe de Heisenberg. Le cas des groupes de rang de nilpotence supérieur à 2 a été moins étudié: Des conditions nécessaires de résolubilité pour des opérateurs homogènes sont données dans [**CR**$_\mathbf{1}$ et **LB**$_\mathbf{4}$]. Des conditions suffisantes, pour des groupes d'un type particulier, sont fournies par [**C**], ou par [**LB**$_\mathbf{3}$] dans le cas des groupes de rang trois et pour des opérateurs homogènes.

Le but de cet article est double: Au §II, on se propose de généraliser les résultats de [**LB**$_\mathbf{3}$] à une large classe de groupes nilpotents, dont le rang de nilpotence r n'est pas borné (dans [**LB**$_\mathbf{3}$], on suppose $r \leq 3$): si P est un opérateur homogène sur un tel groupe, et si $\Pi(P^*)$ est injectif dans l'espace des vecteurs C^∞ de Π, pour toute représentation unitaire irréductible non triviale et non générique, alors P est localement résoluble (Théorème 2.2).

Au §III seront donnés des exemples. Le §IV est consacré à l'extension des résultats précédents au cas où l'opérateur P n'est pas supposé homogène. On prouve en effet que si la partie principale homogène P_m de P vérifie les conditions nécessaires du §II, alors P est encore localement résoluble.

Soit G un groupe de Lie connexe, simplement connexe, dont l'algèbre de Lie $\mathfrak{G}$ admet une décomposition de la forme

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{G}_r \tag{1.1}$$

avec $[\mathfrak{G}_i, \mathfrak{G}_j] \subset \mathfrak{G}_{i+j}$, et $\mathfrak{G}_k = \{0\}$ pour $k > r$.

L'algèbre universelle enveloppante complexifiée $\mathfrak{U}_{\mathfrak{C}}(\mathfrak{G})$ étant identifiée à l'algèbre des opérateurs différentiels, à coefficients complexes, invariants à gauche sur G, on

Received by the editors June 27, 1984.
1980 *Mathematics Subject Classification*. Primary 35A05, 35B45, 22E30.

©1986 American Mathematical Society
0002-9947/86 $1.00 + $.25 per page

prolonge à cette algèbre la famille de dilatation définie par

$$\delta_{t|\mathfrak{G}_i} = t^i \,\mathrm{Id} \qquad (t > 0). \tag{1.2}$$

On note alors $\mathfrak{U}_m$ la composante homogène de degré m de $\mathfrak{U}_{\mathfrak{C}}(\mathfrak{G})$, et $\mathfrak{U}^m$ la somme directe:

$$\mathfrak{U}^m = \mathfrak{U}_0 + \cdots + \mathfrak{U}_m, \quad \text{avec } \mathfrak{U}_0 = \mathfrak{C}. \tag{1.3}$$

On note aussi

$$\mathfrak{G}^k = \bigoplus_{i=k}^{r} \mathfrak{G}_i. \tag{1.4}$$

Si Π désigne une représentation de G d'espace H_π, on définit l'espace H_π^m par

$$H_\pi^m = \{u \in H_\pi,\ \forall\, A \in \mathfrak{U}^m, \Pi(A)u \in H_\pi\}.$$

On munit cet espace de la norme donnée par une base de $\mathfrak{U}^m$.

A toute forme linéraire l sur $\mathfrak{G}$ est associée une classe de représentations unitaires irréductibles de G. On notera Π_l une de ces représentations, H_l^m l'espace $H_{\pi_l}^m$, $\mathfrak{S}_l$ l'espace de ses vecteurs C^∞. Dans tout l'article, l'orbite $G \cdot l$ de l est celle de la représentation coadjointe.

II. Opérateurs homogènes sur des groupes de rang de nilpotence arbitraire. Nous allons dans ce paragraphe utiliser la méthode de [**LB$_3$**] pour certains groupes, dont le rang de nilpotence n'est pas nécessairement 2 ou 3. Les points nouveaux essentiels par rapport à [**LB$_3$**] sont l'utilisation d'un théorème sur les suites de représentations [**HN$_3$**], et d'une inégalité de Hulanicki, Jenkins et Ludwig [**HJL**]. Pour fixer les notations, il faut rappeler certains points bien connus: Soit $\mathfrak{G}$ une algèbre de Lie nilpotente graduée et $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ une base construite par juxtaposition de bases des $\mathfrak{G}_i$. $\{e_i\}$ est dite base de Jordan-Hölder graduée et on a le résultat suivant:

PROPOSITION 2.1. *Il existe une partition de $\{1,\dots,n\}$ en deux sous-ensembles non vides I et J, et un polynôme $d(x)$ non nul et invariant sous l'action de G sur $\mathfrak{G}^*$, tels que, si V, resp. W, est le sous-espace vectoriel engendré par les e_i^* pour i dans I, resp. dans J, on ait:*

(1) *$\mathfrak{O} = \{l \in \mathfrak{G}^*,\ d(l) \neq 0\}$ est une réunion d'orbites dont chacune coupe V en un point unique.*

(2) *Pour l dans $\mathfrak{O}$, l'orbite de l est donnée par $G \cdot l = \{(z, F(l,z)),\ z \in W\}$, où F est continue de $\mathfrak{O} \times W$ dans V, rationnelle en l, et polynomiale en z.*

(3) *On peut faire sur $\mathfrak{O}$ un choix de polarisation dépendant rationnellement de l.*

Les points (1) et (2) sont classiques et le point (3) est prouvé dans [**CG**], et résulte facilement de [**V**].

Il résulte de (3) que pour a dans $\mathfrak{G}$, l'opérateur $\Pi_l(a)$ peut se réaliser comme opérateur différentiel à coefficients polynomiaux, dépendants analytiquement de l.

Dans la suite, conique signifie stable par les dilatations δ_t^*.

THÉORÈME 2.2. *Soit $\mathfrak{G}$ une algèbre de Lie nilpotente graduée de rang r et $(d, \mathfrak{O}, V)$ définis à partir d'une base de Jordan-Hölder graduée par la Proposition* 2.1. *On fait sur $\mathfrak{G}$ les hypothèses suivantes*:

(H_0) $(\mathfrak{O} \cap V) \cap (\mathfrak{G}^2)^\perp \neq \{0\}$.

(H_1) $[\mathfrak{G}^2, \mathfrak{G}^2] = 0$.

Soit P un élément de $\mathfrak{U}_m(\mathfrak{G})$ tel que:

(H_2) $\Pi_l(P^*)$ *est injectif dans $\mathfrak{S}_l$ pour tout l de $\mathfrak{G}_r^\perp$.*

(H_3) $\Pi_l(P^*)$ *est injectif dans $\mathfrak{S}_l$ pour tout l de $\Gamma/\{0\}$, où Γ est l'enveloppe conique fermée du complémentaire de $\mathfrak{O}$.*

Alors P est localement résoluble.

Formulons tout d'abord quelques remarques sur cet énoncé.

REMARQUE 2.3. (1) L'hypothèse (H_0) est indépendante de la base graduée choisie, et généralise celle faite dans [**LB₃**]: elle fournit la direction “complexifiable” pour éviter les l telles que $\Pi_l(P)$ soit non inversible.

(2) L'hypothèse (H_1) est technique, et permet d'appliquer les résultats de [**HN₃**] sur les perturbations d'inégalités afin d'obtenir un voisinage du complémentaire de $\mathfrak{O}$ sur lequel $\Pi_l(P)$ est inversible. Nous ne savons pas nous en dispenser en général; cependant nous donnerons à la fin de cet article des cas particuliers où on peut supprimer (H_1), en modifiant cependant (H_3).

(3) (H_2) est l'hypothèse “Ro-dégénérée” de Helffer et Nourrigat, et est devenue classique dans ces problèmes. (H_3) peut se comprendre comme une extension de (H_2). Dans [**LB₃**], on obtenait un résultat pour $r = 2$ ou 3 sous une hypothèse similaire à (H_3), mais plus explicite et indépendante de la base choisie (cf. [**LB₃**]). De plus, si $\mathfrak{G}$ est stratifiée (i.e. engendrée par $\mathfrak{G}_1$), (H_2) est contenue dans (H_3).

(4) Si $\Pi_l(P^*)$ est injectif pour l dans le complémentaire de $\mathfrak{O}\backslash\{0\}$, il l'est pour l dans l'enveloppe conique, privée de $\{0\}$, de cet ensemble. Si l'ensemble des zéros de d est conique, on peut remplacer (H_3) par

(H_3') $\Pi_l(P^*)$ *est injectif pour tout l non nul du complémentaire de $\mathfrak{O}$. C'est ce qui se produit si $r = 2$ ou 3* [**LB₃**], *et nous donnerons d'autres exemples au* §IV.

Si $\Gamma = \mathfrak{G}^*\backslash\{0\}$, ($H_3$) équivaut à l'hypoellipticité de P^*, et notre théorème n'apporte rien de nouveau.

On verra que l'hypothèse (H_3) peut aussi être remplacée par la suivante:

(H_3'') *Il existe une puissance $\mathfrak{Q}$ de PP^*, une constante $C > 0$ et une base B_i de $\mathfrak{U}_{d^0\mathfrak{Q}}$ telles que*

$$\forall\, l \notin \mathfrak{O},\ l \neq 0,\ \forall\, u \in \mathfrak{S}_l, \quad \sum \|\Pi_l(B_i)u\|^2 \leq C\|\Pi_l(\mathfrak{Q})u\|^2.$$

Le reste de cette section est consacré à la preuve du Théorème 2.2.

On munit $\mathfrak{G}^*$ d'une structure euclidienne pour laquelle les $\mathfrak{G}_i^*$ sont deux à deux orthogonaux, et de la norme quasihomogène associée à la graduation. Si $l = \sum l_i$, $l_i \in \mathfrak{G}_i^*$, on pose

$$|||l||| = \sum \|l_i\|^{1/i}.$$

Ici, $\|l_i\|$ est la norme euclidienne de l_i. On pose de plus:

$$|l| = \inf\{|||l'|||, l' \in G \cdot l\}.$$

Le schéma de la démonstration est le suivant:

Etape 1. On utilise un résultat de [**HN$_3$**] pour déduire de (H_3) et (H_2) que $\Pi_l(P^*)$ est inversible sur un voisinage ouvert du complémentaire de $(\mathfrak{O} \cap \{l \mid \|l_r\| = r\})$. C'est ici que ($H_1$) est essentielle.

Etape 2. On utilise l'homogénéité, (H_2) et l'inégalité de [**HJL**] pour n'avoir à étudier que des représentations paramètrées par un compact inclus dans $\mathfrak{O} \cap V$: on pourrait ne pas utiliser cette inégalité, à condition de suivre les constructions d'algèbres isotropes de [**HN$_2$**], comme nous faisions dans [**LB$_3$**]. La présentation suivie ici semble plus agréable.

Etape 3. Pour ces représentations, on utilise (H_0) et la déformation complexe de [**LB$_3$**].

Etape 4. La formule de Plancherel permet de "recoller les morceaux" comme dans [**LB$_3$**].

Remarquons tout d'abord que l'on peut considérer $(PP^*)^k$ au lieu de P, et donc supposer P auto-adjoint de degré m aussi grand que nécessaire. Par homogénéité, il nous suffit d'étudier l'inversibilité des $\Pi_l(P)$ pour les l tels que $\|l_r\| = 1$.

Soit (Ai) une base de $\mathfrak{U}_m$ fixée pour la suite; m est choisi assez grand pour que l'on puisse appliquer les théorèmes de [**HN$_3$** et **HN$_2$**].

Etape 1.

PROPOSITION 2.4. *Il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\forall\, l \in \mathfrak{G}_r^\perp \cup \Gamma,\ l \neq 0,\ \forall\, u \in \mathfrak{S}_l, \quad \sum \|\Pi_l(A_j)u\|^2 \leq C\, \|\Pi_l(P)u\|^2 . \tag{2.1}$$

Il suffit d'appliquer le Théorème 1.4, Chapitre VIII de [**HN$_3$**], en utilisant les hypothèses (H_1), (H_2), (H_3). On constatera par la suite que (2.1) sera utilisée seulement pour les l de $\mathfrak{G}_r^\perp$ et de l'enveloppe conique du complémentaire de $\mathfrak{O}$. Puisqu'une telle inégalité est vraie pour $l \in \mathfrak{G}_r^\perp \backslash \{0\}$, on voit que ($H_3$) peut être remplacée par (H_3'').

PROPOSITION 2.5. *Soit l^0 un point du complémentaire de $\mathfrak{O}$, avec $\|l_r^0\| = 1$, et $\varepsilon > 0$. Il existe un voisinage ouvert $V(l^0)$ tel que*

$$\forall\, l \in V(l^0),\ \forall\, u \in \mathfrak{S}_l, \quad \sum \|\Pi_l(A_j)u\|^2 \leq (C + \varepsilon)\, \|\Pi_l(P)u\|^2 . \tag{2.2}$$

Si (2.2) n'est pas vérifiée, il existe une suite l^n tendant vers l^0, avec

$$\sum \|\Pi_{l^n}(A_j)u\|^2 > (C + \varepsilon)\|\Pi_{l^n}(P)u\|^2.$$

On peut supposer que les orbites des l^n ont même dimension.

On utilise maintenant l'hypothèse (H_1):

Pour aboutir à une contradiction, on applique le Théorème 2.1.2 et le Corollaire 5.2 du Chapitre VIII de [**HN$_3$**]: il suffit de montrer que si $\bar{l}$ est de la forme:

$$\bar{l} = \lim \delta^*_{t_{n_k}} g_{n_k} l^{n_k}, \qquad t_{n_k} > 0,\ g_{n_k} \in G. \tag{2.3}$$

Alors

$$\sum \|\Pi_{\bar{l}}(A_j)u\|^2 \leq C\|\Pi_{\bar{l}}(P)u\|^2. \tag{2.4}$$

Soit $e \in \mathfrak{G}_r$, tel que $l^0(e) \neq 0$, $l^{n_k}(e) \to l^0(e)$

$$\delta^*_{t_{n_k}} g_{n_k} l^{n_k}(e) = (t_{n_k})^r l^{n_k}(e) \to \bar{l}(e).$$

Donc t_{n_k} est bornée. Si t_{n_k} a pour limite zéro, alors il résulte de (2.3) que $\bar{l}_r = 0$, et (2.4) est conséquence de (2.1). Sinon, on peut extraire une sous-suite, et supposer que $t^{n_k} \to t^\infty \neq 0$. Alors

$$g_{n_k} l^{n_k} \to \delta^*_{1/t^\infty} \bar{l}.$$

Si d est le polynôme définissant $\mathfrak{O}$, on a

$$d(\delta^*_{1/t^\infty} \bar{l}) = \lim d(g_{n_k} l^{n_k}) = \lim d(l^{n_k}) = d(l^0) = 0.$$

Donc $\bar{l}$ est dans Γ, et (2.4) résulte de (2.1).

Etape 2. On paramètre les représentations par $\mathfrak{O} \cap V$ (Proposition 2.1), et, d'après l'étape 1, on travaille sur un fermé K inclus dans $\mathfrak{O} \cap V \cap \{l \mid \|l_r\| = 1\}$. Soit P_i la projection de $\mathfrak{G}^*$ sur $\mathfrak{G}^*_i$.

LEMME 2.6. *Il existe deux constantes L_{r-1} et C_{r-1} positives telles que, pour tout l de K:*

$$(2.5) \qquad (\|P_{r-1}(l)\| \geq L_{r-1}) \Rightarrow (\forall\, u \in H^m_l,\ \|u\|_0^2 \leq C_{r-1} \|\Pi_l(P)u\|_0^2).$$

Soit l dans K, avec $P_r(l) = l_r$.

Remarquons tout d'abord, avec les notations de la Proposition 2.1, que si l_z est le point de paramètre $z \in W$ de l'orbite de l, alors

$$(2.6) \qquad P_r(l_z) = l_r, \quad P_{r-1}(l_z) = l_{r-1} + \tilde{F}(l,z), \quad P_{W \cap \mathfrak{G}_{r-1}}(z)$$

(où $P_{W \cap \mathfrak{G}_{r-1}}$ est la projection sur $W \cap \mathfrak{G}_{r-1}$), avec $\tilde{F}(l,\ )$ analytique en l, indépendante de la projection de l sur $\mathfrak{G}^*_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{G}^*_{r-1}$: Soit p^{r-1} la projection sur $\mathfrak{G}^*_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{G}^*_{r-1}$. Il existe l^0 dans $\mathfrak{G}^*_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{G}^*_{r-1}$, de norme inférieure à 1 dans cet espace, et tel que $d((l^0, l^r)) \neq 0$. Sinon le polynôme $d((\cdot, l^r))$ serait identiquement nul, ce qui contredit le fait que l est dans K. On a donc:

$$(2.7) \qquad \tilde{F}(l,z) = \tilde{F}(l^0, l_r, z).$$

On en déduit l'existence, pour tout $C_1 > 0$, d'une constante L_{r-1} telle que

$$(2.8) \qquad \forall\, l \in K, \quad \|P_{r-1}(l)\| \geq L_{r-1} \Rightarrow |l| \geq C_1.$$

D'après la Proposition 2.1, si $\|z\| \geq C_1$, alors $\|l_z\| \geq C_1$. D'autre part, la fonction $\tilde{F}$ est bornée sur le compact $K \cap \{l, \|P^{r-1}(l)\| \leq 1\} \times \{z \mid \|z\| \leq C_1\}$. (2.8) se déduit alors de (2.6) et (2.7).

En utilisant une base de $\mathfrak{U}^m$ contenant un opérateur auto-adjoint hypoelliptique d'ordre m (cf. [**HN₁**]), on peut écrire le résultat de [**HJL**] sous la forme suivante:

$$(2.9) \qquad \exists\, C' > 0\ \forall\, u \in H^m_l, \quad |l|^{2m} \|u\|_0^2 \leq C' \|u\|^2_{H^m_l}.$$

L'hypothèse (H_2) implique qu'il existe C'', telle que pour $\|l_r\| \leq 1$, on ait:

$$(2.10) \qquad \|u\|_{H^m_l} \leq C''(\|\Pi_l(P)u\|_0 + \|u\|_0).$$

(2.5) résulte de (2.9), (2.10) et (2.8).

On est ainsi ramené à étudier les $\Pi_l(P)$ pour l dans $K \cap \{\|P_{r-1}(l)\| \leq L_{r-1}\}$. Le même raisonnement que celui du Lemme 2.6 appliqué aux $P_{r-i}(l)$ pour $i = 1, \ldots, r-1$ montre par récurrence sur i qu'il ne reste à étudier l'inversibilité des $\Pi_l(P)$ que sur un compact de V contenu dans le complémentaire de $\mathfrak{O} \cap V$. C'est l'objet des étapes 3 et 4, qui suivent les lignes de [**LB₃**], et que nous ne développerons pas ici. Il faut vérifier les Lemmes 7.8 et 7.11 de cet article; pour le premier on peut utiliser [**LB₄**], et pour le deuxième le fait que, si $l = (l_1, l')$:

$$(2.11) \qquad \forall X \in \mathfrak{G}, \quad \Pi_l(X)f = a_1(l')l_1 f + (\text{termes indépendants de } l_1),$$

avec a_1 analytique. C'est dans cette partie de la preuve qu'est utilisée (H_0).

III. Exemples. Tout d'abord, conformément à la Remarque 2.3, $n^0 2$, nous donnons une modification du Théorème 2.2, en conservant les notations du §II, en particulier pour les définitions de $(\mathfrak{O}, d, V)$.

THÉORÈME 3.1. *Soit $\mathfrak{G}$ une algèbre de Lie nilpotente graduée de rang r, vérifiant:*

(H_0) $(\mathfrak{O} \cap V) \cap (\mathfrak{G}^2)^\perp \neq \{0\}$.

(H_4) *d est indépendant de $\mathfrak{G}_r^\perp$.*

Soit P un élément de $\mathfrak{U}_m(\mathfrak{G})$ vérifiant:

(H_2) *$\Pi_l(P^*)$ est injectif dans $\mathfrak{S}_l$ pour tout l de $\mathfrak{G}_r^\perp$.*

(H_3'') *Il existe une puissance $\mathfrak{Q}$ de PP^*, une constante $C > 0$, et une base B_i de $\mathfrak{U}_{d^0\mathfrak{Q}}$ telles que*

$$\forall\, l \notin \mathfrak{O},\ l \neq 0,\ \forall\, u \in \mathfrak{S}_l, \qquad \sum \|\Pi_l(B_i)u\|^2 \leq C\|\Pi_l(\mathfrak{Q})u\|^2.$$

Alors P est localement résoluble.

Remarquons que par rapport au Théorème 2.2, l'hypothèse (H_1) a disparu, mais est remplacée par (H_4). Par les arguments de [**HN₃**], et en utilisant (H_4), on peut montrer que (H_3'') est équivalente à l'injectivité de $\Pi_l(P^*)$ pour l n'appartenant pas à $\mathfrak{O}$.

La simplification par rapport au Théorème 2.2 réside dans l'étape 1, Proposition 2.5: pour obtenir un voisinage de l'ensemble des zéros de d dans $\mathfrak{G}_r^*$ sur lequel $\Pi_l(P)$ est inversible, on peut utiliser, à partir de l'inégalité de (H_3''), la Proposition 2.3 de [**LB₃**] en utilisant $\mathfrak{G}_r$ et non $\mathfrak{G}^2$. La suite de la démonstration est identique à celle du Théorème 2.2.

On peut donner des exemples d'applications du Théorème 3.1: Si G est un groupe nilpotent gradué de rang r admettant des représentations de carré intégrable [**MW**], et tel que le centre de l'algèbre de Lie $\mathfrak{G}$ de G soit $\mathfrak{G}_r$, alors le produit direct $\mathbf{R} \times G$ vérifie les hypothèses du Théorème 3.1. Les groupes G du type précédent ont été utilisés par L. Corwin [**C**] pour étudier des critères de résolubilité. Les groupes de "type H généralisé" de [**CR₂**] vérifient les propriétés précédentes. Il est prouvé dans cet article qu'il existe des groupes de ce type de rang de nilpotence arbitraire. Il est d'ailleurs connu ([**LB₁**] par exemple), que l'adjonction d'une variable, en faisant le produit par $\mathbf{R}$, favorise la résolubilité.

Voici un exemple de groupe de rang 4 qui n'est pas de ce type: L'algèbre de Lie $\mathfrak{G}$ de G est engendrée par X, Y, Z, T, U avec pour seuls crochets non nuls: $[X, Y] = Z$, $[X, Z] = T$, $[X, T] = U$.

Soit $\{X^*, Y^*, Z^*, T^*, U^*\}$, la base duale de $\{X, Y, Z, T, U\}$, et un élément de $\mathfrak{G}$ dont les coordonnées sont: (x, y, z, t, u). On vérifie sans peine que les représentations en position générale sont celles vérifiant $u \neq 0$. Avec les notations de l'introduction, $V = \mathbf{R}Y^* \oplus \mathbf{R}Z^* \oplus \mathbf{R}U^*$. (H_1) et (H_4) sont réalisées, (H_0) est vérifiée, et (H_2) et (H_3) (ou (H_3')), se résument à (H_2). On en déduit par exemple la résolubilité locale sur ce groupe de l'opérateur: $P = X^{12} + Y^{12} + Z^6 + T^4 + UQ(X,Y,Z,T,U)$, où Q est un polynome homogène de degré 8.

IV. Extension des resultats précédents a des opérateurs non homogènes. Soit P un élément de $\mathfrak{U}^m$, qui se déompose sous la forme $P = P_m + P_{m-1} + \cdots + P_0$, où $P_i \in \mathfrak{U}_i$ $(i = 0, \ldots, m)$.

On suppose, soit que G vérifie les hypothèses du Théorème 2.2, resp. du Théorème 3.1, soit que G est de rang de nilpotence 2 ou 3 et vérifie les hypothèses de [**LB₃**] qui seront rappelées ci-dessous.

THÉORÈME 4.1. *Dans la situation précédente, si $r > 3$ et si P_m vérifie les conditions suffisantes du Théorème 2.2, resp. du Théorème 3.1, alors P est localement résoluble.*

Pour la commodité du lecteur, on va expliciter également le résultat obtenu si $r \leq 3$ [**LB₃**]. On définit pour tout l de $\mathfrak{G}^*$:

Si $r = 3$:

$$i = 1, 2, \qquad \tilde{R}_l^i = \{X \in \mathfrak{G}_i,\ \forall Y \in \mathfrak{G}^{3-i}, l([X,Y]) = 0\}$$

et

$$R_l^1 = \{X \in \tilde{R}_l^1,\ \forall Y \in \tilde{R}_l^1, l([X,Y]) = 0\}.$$

Si $r = 2$:

$$R_l^1 = \{X \in \mathfrak{G}_1,\ \forall Y \in \mathfrak{G}_1, l([X,Y]) = 0\}.$$

On note F l'ensemble défini par

· si $r = 2$, F est l'ensemble des éléments de $\mathfrak{G}^*$ dont l'orbite n'est pas de dimension maximale.

· si $r = 3$, F est la réunion de l'ensemble des éléments de $\mathfrak{G}^*$ dont l'orbite n'est pas de dimension maximale, et de ceux tels que la dimension de $\tilde{R}_l^2$ ne soit pas minimale.

Il résulte de [**LB₃**] que F est un fermé conique (pour δ_t^*) de $\mathfrak{G}^*$, de mesure nulle.

THÉORÈME 4.2. *Soit P dans $\mathfrak{U}^m$. On suppose que*
(1) $\dim R_l^1 \geq 1$ *pour tout l de $\mathfrak{G}^*$.*
(2) $\Pi_l(P_m^*)$ *est injectif dans $\mathfrak{S}_l$ pour tout l de $F \backslash \{0\}$.*
Alors P est localement résoluble.

Dans le cas où $P = P_m$, on retrouve les résultats de [**LB₃**]. Si $r = 2$, et si le rang de la forme $(X,Y) \to l([X,Y])$ est constant pour l non nul, on pourrait utiliser, à la place de la déformation complexe, la méthode d'inversion de matrice analytique comme dans [**CR₂**].

En résumé, dès que la partie principale homogène P_m de P vérifie l'une de nos conditions suffisantes de résolubilité, P lui-même est localement résoluble. L'idée de la preuve est la suivante: on prouve que pour $h = \|l_r\|$ assez grand, $h^{-m/r}\Pi_l(P)$ est une perturbation de $h^{-m/r}\Pi_l(P_m)$, et vérifie donc les mêmes inégalités.

Il suffit de reprendre l'étape 4 du §II (utilisation de la formule de Plancherel), pour vérifier que les représentations correspondant à h petit n'interviennent pas pour la résolubilité.

On munit $\mathfrak{G}$ d'une structure euclidienne rendant les $\mathfrak{G}_i$ orthogonaux. Remarquons tout d'abord qu'on peut supposer $P = P^*$, et m aussi grand que nécessaire [**LB₃**, Remarque 2.5]. Si $l = (l_1, \dots, l_r)$ est un élément de $\mathfrak{G}^* = \mathfrak{G}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{G}_r$, avec l_r non nul, on pose

$$h = \|l_r\|, \qquad \tilde{l} = (h^{-1/r} l_1, \dots, h^{-1} l_r) = (\tilde{l}_1, \dots, \tilde{l}_r) \tag{4.1}$$

et

$$\begin{aligned} \Pi_l(P) &= h^{m/r}[\Pi_{\tilde{l}}(P_m) + h^{-1/r}\Pi_{\tilde{l}}(P_{m-1}) + \cdots + h^{(1-m)/r}\Pi_{\tilde{l}}(P_0)] \\ &= h^{m/r}\Pi_{\tilde{l},h}(P) = h^{m/r}[\Pi_{\tilde{l}}(P_m) + N_{\tilde{l},h}]. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Remarquons que l'opérateur $N_{\tilde{l},h}$ est continu de $H^m_{\tilde{l}}$ dans L^2, et que sa norme tends vers zéro uniformément par rapport à $\tilde{l}$ quand h tends vers $+\infty$. Il résulte de sa définition que F contient $\mathfrak{G}_r^{\perp}$. P vérifie l'hypothèse "Ro-dégénérée" de [**HN₂**], d'où il résulte une inégalité du type:

$$\forall\, l \in \mathfrak{G}^*,\ \|l_r\| \le 1,\ \forall\, u \in \mathfrak{S}_l, \quad \|u\|_{H^m_{\tilde{l}}} \le C(\|\tilde{\Pi}_{\tilde{l},h}(P)u\| + \|u\|).$$

La famille $h \to \tilde{\Pi}_{\tilde{l},h}(P)$ est donc une famille holomorphe de type A d'opérateurs auto-adjoints de domaine $H^m_{\tilde{l}}$ pour $h \ge h_0$, h_0 indépendant de $\tilde{l}$ (cf. [**RT**] par exemple). Pour $h \ge h_0$, $\Pi_l(P)$ est donc (au facteur $h^{m/r}$ près), une perturbation de $\Pi_{\tilde{l}}(P_m)$ par des opérateurs $N_{\tilde{l},h}$, holomorphes et dont les normes sont contrôlées. Les inégalités obtenues au §II pour $\Pi_{\tilde{l}}(P)$ si $P = P_m$ sont encore valables pour $h \ge h_1$.

Nous allons décrire précisément la fin de la démonstration en suivant [**LB₃**], donc dans le cas où $r = 3$. Le cas $r > 3$ se traite de façon similaire, mais il faudrait réécrire ici en détail les étapes 3 et 4 du §II. On construit comme dans [**LB₃**], pour φ fixée dans $C_0^\infty(G)$, une distribution $E(\varphi)$ sur G telle que

(4.3)
$$\forall\, \psi \in C_0^\infty(G), \quad \langle \overline{P}E(\varphi), \psi \rangle = \langle L\varphi, \psi \rangle - \int_{\|x_3\| \le h_1} \mathrm{Tr}[\Pi_x(\psi)\Pi_x(L\varphi)] r(x)\, dx.$$

L est ici opérateur bi-invariant sur G, $r\,dx$ la mesure de Plancherel, x parcourant un ouvert de Zariski d'un espace numérique paramètrant les représentations de G en "position générale". La formule (4.3) découle de la Proposition 7.14 de [**LB₃**], en restreignant l'intégration aux x tels que $\|x_3\| \ge h_1$: pour les autres, l'argument de perturbations ne donne pas d'information suffisante. On va montrer cependant qu'ils sont "négligeables" pour le problème de la résolubilité locale; pour cela, il faut dans un premier temps préciser la régularité de l'application $\varphi \to E(\varphi)$. Il semble plus facile d'utiliser une décomposition de δ en produit de convolution [**C**] que le résultat de Dixmier-Malliavin servant dans [**LB₃**]. Le lecteur se reportera à [**LB₃**] pour suivre la démonstration du lemme suivant:

LEMME 4.3. *Il existe un entier positif k, tel que l'application $\tilde{E}$ de C_0^∞ dans $\mathfrak{D}'$ définie par $\varphi \to E(\varphi)$, se prolonge en un opérateur continu de L^2 dans H^{-k}_{loc} (espace de Sobolev usuel).*

Soit φ dans C_0^∞. Il s'agit de prouver avec les notations de [**LB₃**], (Proposition 7.14), qu'il existe k positif tel que pour toute fonction ψ C^∞ à support dans un compact K:

$$|E(\psi)| \leq C\|\varphi\|_0\|\psi\|_{H^k}. \tag{4.4}$$

Ecrivons, comme dans [**LB₃**], $E(\psi)$ sous la forme:

$$E(\psi) = I_1 + I_2 + \sum_{i,j} I_{3,i,j} + \sum_{i,j,k} I_{4,i,j,k} + \sum_{i,j,k} I_{5,i,j,k}.$$

e e $_0$ ^{a} $_0$

a est un entier positif.

Dans [**LB₃**], pour étudier $I_{5,i,j,k}$, on décompose φ sous la forme d'une somme de $\varphi_i * \varphi_2$, mais avec des renseignements insuffisants sur φ_1 et φ_2.

D'après [**C**, Lemme 3.1], il existe une fonction g de $L^1(G) \cap L^2(G)$, et un élément $\mathfrak{Q}$ de $\mathfrak{U}(G)$, tels que

$$g * \mathfrak{Q} = \delta \quad \text{(masse de Dirac en l'élément neutre de } G\text{).} \tag{4.5}$$

Dans (4.5), $\mathfrak{Q}$ est considérée comme une distribution dont le support est l'origine du groupe; on notera encore $\mathfrak{Q}$ l'opérateur différentiel invariant à gauche associé, et $\mathfrak{Q}'$ l'opérateur invariant à droite. Rappellons l'expression de $I_{5,i,j,k}$:

$$I_{5,i,j,k} = \int_{\tilde{\sigma}_k^j} \left(\tfrac{1}{2}\Pi\sqrt{-1}\right) \int_{\Gamma_j^k(l)} \mathrm{Tr}\left[\Pi_z(\psi)(\Pi_z(P)_{|\Lambda_k(z)})^{-1} \cdot \mathfrak{P}_k(z)\Pi_l(L\varphi)\right]$$
$$\cdot dz_{1/(z_1 - l_1'^1)} |r(x^{i,j,k}(l))| F_{i,j,k}(l)\, dl'.$$

Soit $\Theta_z = (e^{(\operatorname{Im} z_1)\tilde{W}_1}\psi \circ \exp) \circ \operatorname{Log}$. Alors [**LB₃**, Lemme 7/15], $\Pi_z(\psi) = \Pi_l(\Theta_z)$. Posons $M(z) = (\Pi_z(P)_{|\Lambda_k(z)})^{-1}\mathfrak{P}_k(z)$, et

$$T = \mathrm{Tr}[M(z)\Pi_l(L\varphi)\Pi_l(\Theta_z)].$$

Alors,

$$T = \mathrm{Tr}[M(z)\Pi_l(L\varphi)\Pi_l(g)\Pi_l(\mathfrak{Q} * \Theta_z)],$$

d'après (4.5). D'où

$$T = \mathrm{Tr}[\Pi_l({}^t\mathfrak{Q}'\Theta_z)M(Z)\Pi_l(L\varphi)\Pi_l(g)],$$

avec $\mathfrak{Q}'$ opérateur différentiel à coefficients polynômiaux. On peut appliquer le Lemme 7.15 de [**LB₃**], avec ${}^t\mathfrak{Q}'\Theta_z$ à la place de Θ. Via l'inégalité (7.17)″ de [**LB₃**], on prouve (4.4).

Réécrivons (4.3) sous la forme

$$\forall \varphi \in C_0^\infty, \quad \overline{P}E(\varphi) = L\varphi + R(\varphi) \tag{4.6}$$

avec

$$\forall \varphi \in C_0^\infty,\ \forall \psi \in C_0^\infty, \quad \langle R(\varphi), \psi\rangle = \int_{\|x_3\| \leq h_1} \mathrm{Tr}[\Pi_x(\psi)\Pi_x(L\varphi)]r(x)\, dx. \tag{4.7}$$

Soit Z un élément non nul de $\mathfrak{G}_3$, et pour tout entier s positif, on définit:

$$\mathfrak{H}^s = \{u \in L^2, Z^{s'}u \in L^2(G),\ \forall s' \leq s\}.$$

On munit $\mathfrak{H}^s$ de sa norme évidente.

En utilisant la bi-invariance de L, et le fait que $\Pi_x(Z)$ est la multiplication par $\langle x, Z\rangle$, il résulte de (4.7) que

$$\forall \varphi \in C_0^\infty, \quad \|R^*(\varphi)\|_{\mathfrak{H}^s} \leq \|L\varphi\|_0(1+h_1+\cdots+h_1^s) \tag{4.8}$$

(on a utilisé la formule de Plancherel: $\langle \varphi, \psi\rangle = \int \operatorname{Tr}[\Pi_x(\psi)\Pi_x(\varphi)]r(x)\,dx$). En utilisant l'inégalité (4.8) pour $s=2$, on déduit de l'inégalité de Poincaré que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists\, \mathfrak{V}_\varepsilon \text{ (voisinage de } e \text{ dans } G), \ \forall u \in C_0^\infty(\mathfrak{V}_\varepsilon), \tag{4.9}$$
$$\|R^* u\|_{\mathfrak{H}^1} \leq \varepsilon \|Lu\|_0.$$

Mais L^* étant bi-invariant, il vérifie localement une inégalité du type: $\|u\| \leq C\|L^*u\|$. On obtient donc un voisinage $\mathfrak{V}$ de e dans G tel que

$$\forall u \in C_0^\infty(\mathfrak{V}), \quad \|u\|_{\mathfrak{H}^1} \leq \tilde{C}\|(PE)^*u\|_{\mathfrak{H}^1}. \tag{4.10}$$

Soit f dans $C_0^\infty(\mathfrak{V})$. La forme linéaire $(PE)^*u \to \langle u, f\rangle_{\mathfrak{H}^1}$ est bien définie sur $(PE)^* C_0^\infty(\mathfrak{V})$ d'après (4.10), et se prolonge en une forme linéaire continue sur $\mathfrak{H}^1$. Donc, il existe h dans $\mathfrak{H}^1$ tel que

$$\forall u \in C_0^\infty(\mathfrak{V}), \quad \langle u, f\rangle_{\mathfrak{H}^1} = \langle (PE)^*u, h\rangle_{\mathfrak{H}^1}.$$

Soit

$$\forall u \in C_0^\infty(\mathfrak{V}), \quad \langle u, f\rangle + \langle Zu, Zf\rangle = \langle u, (PE)(h)\rangle + \langle Z(PE)^*u, Zh\rangle.$$

Mais Z étant dans le centre de $\mathfrak{U}(G)$, $[Z, (PE)^*] = 0$, et donc

$$\langle Z(PE)^*u, Zh\rangle = \langle (PE)^* Zu, Zh\rangle = \langle Zu, (PE)Zh\rangle.$$

D'où

$$\begin{aligned}(\mathrm{Id} + ZZ^*)f &= (\mathrm{Id}+ZZ^*)(PE)(h) = (\mathrm{Id}+ZZ^*)P(E(h)) \\ &= P((\mathrm{Id}+ZZ^*)E(h)) \quad \text{dans } \mathfrak{D}'(\mathfrak{V}).\end{aligned}$$

On peut donc résoudre localement l'équation $Pu = (\mathrm{Id}+ZZ^*)f$, et $(\mathrm{Id}+ZZ^*)$ étant résoluble, puisqu'à coefficients constants, on en déduit la résolubilité locale de P.

BIBLIOGRAPHY

[C] L. Corwin, *Criteria for solvability of left invariant operators on nilpotent Lie groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **280** (1983), 53–72.

[CG] L. Corwin and F. P. Greenleaf, *Rationally varying polarizing algebras in nilpotent Lie algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **81** (1981), 27–32.

[$\mathbf{CR_1}$] L. Corwin and L. P. Rothschild, *Necessary conditions for local solvability of homogeneous left invariant differential operators on nilpotent Lie groups*, Acta Math. **147** (1981), 265–288.

[$\mathbf{CR_2}$] ———, *Solvability of transversally elliptic differential operators on nilpotent Lie groups*, preprint, 1983.

[$\mathbf{HN_1}$] B. Helffer and J. Nourrigat, *Hypoellipticité pour des groupes nilpotents de rang de nilpotence* 3, Comm. Partial Differential Equations (8) **3** (1978), 643–743.

[$\mathbf{HN_2}$] ———, *Caractérisation des opérateurs hypoelliptiques homogènes invariants à gauche sur un groupe nilpotent*, Comm. Partial Differential Equations (8) **4** (1979), 899–958.

[$\mathbf{HN_3}$] ———, Livre en préparation.

[HJL] A. Hulanicki, J. W. Jenkins and J. Ludwig, *Minimal eigenvalues for positive Rockland operators*, preprint.

[**LB$_1$**] P. Levy-Bruhl, *Résolubilités d'opérateurs invariants du second ordre sur des groupes nilpotents*, Bull. Sci. Math. (2) **104** (1980), 369–391.

[**LB$_2$**] ——, *Application de la formule de Plancherel à la résolubilité d'opérateurs invariants à gauche sur des groupes nilpotents d'ordre* 2, Bull. Sci. Math. (2) **106** (1982), 171–191.

[**LB$_3$**] ——, *Conditions suffisantes de résolubilité locale*, Comm. Partial Differential Equations (g.g. 1984).

[**LB$_4$**] ——, *Conditions nécessaires de résolubilité locale*, Comm. Partial Differential Equations **8** (1983), 1325–1335.

[**RT**] L. P. Rothschild, *Local solvability of second order differential operators on nilpotent Lie groups*, Ark. Math. **19** (1981), 145–175.

[**MW**] C. C. Moore and J. A. Wolf, *Square integrable representations of nilpotent groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **185** (1973), 445.

[**R**] F. Rouviere, *Sur la résolubilité locale des opérateurs bi-invariants*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **3** (1976), 231–244.

[**V**] M. Vergne, *Construction de sous-álgèbres subordonnées à un élément du dual d'une algèbre de Lie resóluble*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **270** (1970), 704–707.

LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES FONDAMENTALES–UER 48, UNIVERSITÉ P. ET M. CURIE, 4 PLACE JUSSIEU, 75005, PARIS, FRANCE